Matrices

Actividades.

1) Considere las siguientes matrices:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtenga: a) D + E b) E - F c) D + 3 F d) E - F + D

e) La combinación lineal $k1\ D + k2\ E + k3\ F$ siendo $k1=-1$; $k2= 1/2$; $k3 = 2$

2) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenga:

a) A' x B b) B x A c) C' x B d) C' x 2B e) A' x B x C f) (B + B') x A

3) a) ¿Qué condiciones son necesarias para efectuar la suma y el producto matricial respectivamente?

b) Determine los valores de los subíndices i, j, k, m, p, q, t, r para que la siguiente expresión matricial tenga sentido:

$$A_{5xi}\, B_{4xj} - C_{kxm}\, D_{3xp} + F_{tx2} = H_{qxr}$$

4) Para que dos matrices se puedan restar:

a) las matrices deben ser del mismo orden.
b) las matrices deben ser cuadradas.
c) el número de columnas de la segunda debe ser igual al número de filas de la primera.
d) el número de filas de la segunda debe ser igual al número de filas de la primera.
e) el número de filas de la segunda debe ser igual al número de columnas de la primera.

5) Sean A y B dos matrices de orden n , I la identidad. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) $A - A = \square$ b) $(A')' = A$ c) $I\,A = A$ d) $A - B = B - A$ e) $A + B = B + A$

6) Sea C la matriz resultante de efectuar el siguiente producto matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Entonces el valor de C_{32} es:

a) 0 b) 6 c) 3 d) -5 e) -3

7) Una matriz se llama triangular inferior cuando:

a) los elementos de la diagonal son nulos y los que están por debajo de la diagonal son distintos de cero;
b) los elementos de la diagonal son unos;
c) los elementos que están por debajo de la diagonal son todos distintos entre sí.
d) todos los elementos que están por encima de la diagonal son nulos;
e) todos los elementos de la diagonal son iguales entre sí.

8) Si A es de orden 3x5 y B es de orden 4x3, efectuando el producto entre ellas en el único orden posible se obtiene una matriz C de orden:

a) 3x3 b) 3x5 c) 4x3 d) 4x5 e) 5x4

9) ¿Cuál/les de las siguientes afirmaciones es/son verdadera/s?

a) La suma de matrices no es asociativa.
b) El producto matricial es conmutativo.
c) El producto de dos matrices del mismo orden es una matriz cuadrada.
d) El elemento neutro de la suma de matrices es la matriz identidad.
e) El elemento neutro del producto de matrices es la matriz nula.
f) La transpuesta de la transpuesta es la matriz transpuesta.
g) La transpuesta del producto es el producto de las transpuestas en el orden invertido.

10) Sea A una matriz de orden " hxj ", B es otra matriz de orden "i x 2" y C otra matriz de orden "k x r" de manera tal que (A – B) C = D, donde D posee 3 filas y 5 columnas, Obtenga los valores de h, i, j, k, r.

11) Situación problemática:
Una empresa construye tres tipos de viviendas: A, B y C. Se conoce que los requerimientos de mano de obra y materiales son los siguientes:

	Acero	Madera	Vidrio	Pintura	Mano de obra
A	5	20	16	7	17
B	7	18	12	9	21
C	6	25	8	5	13

Se quiere saber:
a) Para cada pedido en particular, de cualquier número de viviendas de cada tipo, que cantidad de materiales se necesitará.
b) Para cada lista de precios de insumos, que recepte la empresa constructora, cuáles serán los precios de costo individuales de cada tipo de casa.
c) ¿Cuál será el precio de cada tipo de casa si se desea obtener un beneficio del 16% sobre el precio de costo, y además a ese monto hay que agregarle el IVA del 18%.
d) Basados en el precio de venta cuál será el presupuesto, por tipo de vivienda, que la empresa debe girar a compradores mayoristas de estas viviendas cualquiera sea el pedido.

13) Siendo A, B y C matrices cuadradas cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) A (B + C) = A B + A C
b) A I = A
c) A (B C) = (B C) A
d) $B^2 + B = B (B + I)$
e) C ϕ = ϕ , con ϕ la matriz nula.

14) ¿Cuando una matriz se dice triangular superior?. ¿Cómo definiría la matriz identidad?¿Qué otras matrices especiales conoce?

15) Si C es la matriz que resulta de efectuar el producto A x B, entonces cómo obtiene el elemento $\mathbf{C_{ij}}$

16) ¿Cómo deben ser dos matrices para que se puedan sumar? ¿Bajo qué condición se pueden multiplicar?

17) Si C es la matriz que resulta de efectuar la siguiente operación entre matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C$$

¿Cuál es el coeficiente c_{23}?

Vectores

1) (Revisemos las operaciones con vectores)

Dados los vectores:

V1 = (-1, -2) ; V2 = (-2, 1) ; V3 = (0,3)

Obtener:

a) V1 + V2 b) V3 - V1 c) 3 V2 d) V3 - 2 V2

e) V1 + V2 + V3 f) 2 V1 - V2 + 3 V3 g) 2 V1 - (V2 + 3 V3)

2) Dados los vectores:

V1 = (-1, 2 , 0) ; V2 = (1, -1, 1) ; V3 = (-3, 1, 1)

Obtener:

a) 2V1 + V2 b) V3 - V1 c) -3 V2 d) V1 - 2 V2

e) 2V1 + (V2 + V3) f) 2 V1 - V2 + 3 V3 g) 2 V1 - (V2 + 3 V3)

4) Obtenga el valor de "k" (si existe) que verifique cada una de las siguientes condiciones:

a) -2 (1,-2, 0) + (k, 1, 3) = (-2, 5 , 3)
b) (0, k, 1 , 0) - (1, 3, 2, 1) = (-1, 1,-1, -1)
c) k (3,-1, 2) = (6, -2, 4)
d) (2,3) + (2, 4) - k(0,0) = (4,7)

5) Si V_1 = (1, -2, 1); V_2 = (1, -4, 1) y V_3 = (-1, 3, -1)

el resultado de la operación $V_1 - (- V_2 + 2 V_3)$ es:

a) 0 b) (2, -4 , 2) c) (0, 0, 0) d) (0, 8, 0) e) (4, -12, 4)

6) Siendo V, W , U vectores k y c escalares, cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) (k + c) V = k V + c V
b) Si V - W = U ==> W = V - U
c) (k.c)V= (kV). (cV)
d) k (V + W) = k V + k W
e) V + W = W + V

7) Siendo V= (x_1, x_2, . . . , x_n) ; W = (y_1, y_2, . . . , y_n) y k un escalar. Complete las siguientes idéntidades.

a) k (V + W) = k (x_1, x_2, . . . , x_n) + ...

b) (x_1 - y_1 , x_2 - y_2, . . . , x_n - y_n) =

8) Siendo V1 = (1, 2) ; V2 = (1, 3) , k1 = 2 ; k2 = -2/3. Obtenga la combinación lineal:
k1 V1 + k2 V2

9) Determine la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

a) [1, 3] ; [3, 0]
b) [1, 2] ; [2, 4]
c) [1, 3] ; [3, 0] ; [0,1]
d) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4]
e) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4] ; [1, 0, 0]
f) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4] ; [6, 0, 2]
g) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4] ; [1, 0, 0]; [1, 1, 1]
h) [3, 0, 1] ; [1, 3, 4] ; [0, 0, 0]
i) [0, 0, 0, 0]
j) [1, 1, 1]
k) [1, 0, 0] ; [0, 1, 0]
l) [1, 0, 0] ; [0, 1, 0] ; [0, 0, 1]
m) [1, 2, 0] ; [-1, 1, 0] ; [0, 3, 0]
n) [-1, 2, 0 ,3] ; [-1,-2, 0, 0]
ñ) [-1, 2, 0 ,3] ; [-1,-2, 0, 0], ; [0, 0, 1, 0]; [0, 0, 0, 1]

10) Completar las siguientes afirmaciones:

a) Si dos o más vectores son linealmente dependientes entonces.. de ellos se expresa como combinación lineal del resto.

b) Dos o más vectores son linealmente .... si y sólo si el vector nulo se expresa como combinación de ellos con todos los escalares iguales a cero.

c) Dos o más vectores son linealmente .... si y sólo si el vector nulo se expresa como combinación de ellos con al menos uno de los escalares distinto de cero.

11) Dos o más vectores son linealmente independientes si y sólo si:

a) El vector nulo se expresa como combinación lineal de esos vectores únicamente con todos los escalares iguales a cero.
b) El vector nulo se expresa como combinación lineal de esos vectores únicamente con todos los escalares distintos de cero.
c) El vector nulo se expresa como combinación lineal de esos vectores con al menos uno de los escalares distinto de cero.
d) Al menos de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto.

12) Si V1 = (-1, 4); V2 = (-1, 2) y V3 = (1, 3)

entonces la igualdad V1 - (- V2 + k V3) = (0, 12) , se verifica para:

a) k=0 b) k=2 c) k=-2 d) k=3 e) Ningún valor de k

13) Para expresar el vector (2, 0) como combinación lineal de V1 = (-1, 2) y V2 = (1, 2) , Los valores de los escalares deben ser:

a) k1= 1 k2 = 1
b) k1= 1 k2 =-2
c) k1=-1 k2 = 1
d) k1=-1/3 k2 = 2/3
e) k1=-1/2 k2 = 1/2

14) Especifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) Todo subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independiente es linealmente independiente.
b) Un espacio vectorial es un conjunto de vectores, al cual se le asigna una única operación con ciertas propiedades.
c) Todo conjunto de vectores que contiene un subconjunto de vectores L.D. es L.D.
d) Un único vector es L.I.

15) Sin hacer cálculos ¿puede decir como deben ser los escalares (iguales a cero, ambos distintos de cero, al menos uno igual a cero) para expresar al vector (0, 0, 0) como combinación lineal de V_1= (-1,0,0) , V_2= (2 ,3, 0) y V_3= (1, 2, 3)?

16) Sin hacer cálculos ¿puede decir cuántas formas existen para expresar al vector (0, 0) como combinación lineal de V_1= (-1,-2) y V_2= (2 ,6) ?

17) Determine cuál de los siguientes conjuntos de vectores es Linealmente dependiente.

a) { (1, 0) ; (0 ,1)}
b) { (1, 3) ; (1/3, 1)}
c) { (1, 0, 0) }
d) { (-2, 0, 0) ; (1, 1, 1) ; (-1, 0, 1) }
e) { (5, 0, 0) ; (5, 5, 2) ; (1, 1, 0) }

18) Determine cuál de los siguientes conjuntos de vectores es Linealmente independiente.

a) { (1, 1) ; (0 ,1); (0, 0)}
b) { (-2, 3) ; (2, 0)}
c) { (0, 0, 0) }
d) { (-2, 0, 0) ; (1, 0, 1) ; (-1, 0, 1) }
e) { (5, 0, 0) ; (4, -1, 0) ; (1, 1, 0) }

19) Establezca la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.
a) Todo conjunto que contiene un subconjunto L.D. es L.D.
b) Todo subconjunto de un conjunto de vectores L.I. es L.I.

Respuestas:

1)

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & -6 \end{pmatrix}$

2)

a) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 16 \\ -4 & 7 & -10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -4 \\ 18 & -14 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 6 & -10 & -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 22 \\ -15 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 4 & 3 \\ 34 & -24 \end{pmatrix}$

3) a)

Para que dos matrices se puedan sumar deben ser del mismo orden.
Para que dos matrices se puedan multiplicar el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.

b) i=4; j=2; k=5; m=3; p=2; t=5; q=5; r=2

4) Opción a) 5) Opción d) 6) Opción b) 7) Opción d) 8) Opción d)

9) Las verdaderas son c) y g)

10) h=i=3; j=k=2; r=5

11) Ayuda: Use matrices para organizar la información. Por ejemplo para el item a) si llamamos A a la matriz que contiene los requerimientos de insumos para cada tipo de vivienda A es de orden 3x5 y si llamamos T a la matriz que contiene las cantidades pedidas de cada tipo de vivienda entonces T es de orden 1x 3, en tal caso podemos obtener el total de cada insumo que se necesitará efectuando el producto TxA.

13) opción c)

14); 15) y 16) Conceptuales.

17) $c_{23} = -4$

Respuestas:

Recuerde que al trabajar con vectores fila puede usar paréntesis ó corchete.
(Por cuestiones de espacio los resultados están expuestos como vectores fila, sin embargo si Ud lo desea puede trabajar con vectores columna)

1) a) (-3; -1) b) (1; 5) c) (-6; 3) d) (4; 1) e) (-3; 2) f) (0; 4) g) (0; -14)

2) a) (-1; 3; 1) b) (-2; -1; 1) c) (-3; 3; -3) d) (-3; 4; -2) e) (-4; 4; 2) f) (-12; 8; 2) g)(6; 2; -4)

3) a) k=0 b) k= 4 c) k= 1 d) Cualquier valor de k verifica la igualdad.

4) e)
5) c)

6) Siendo $V = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $W = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y k un escalar. Complete las siguientes idéntidades.
a) $k (V + W) = k (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mathbf{k (y_1, y_2, \ldots, y_n)}$
b) $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n) = \mathbf{(V - W)}$

7) (4/3; 2)

8) a) L.I. b)L.D. c) L.D. d) L.I.) e) L.I. f) L. D. g) L.D. h) L.D.

i) L.D. j) L.I. k) L.I. l) L.I. m) L.D. n) L.I ñ) L.I

9) Completar las siguientes afirmaciones:

a) Si dos o más vectores son linealmente dependientes entonces.....**al menos uno**.. de ellos se expresa como combinación lineal del resto.
b) Dos o más vectores son linealmente .**independientes**.................. si y sólo si el vector nulo se expresa como combinación de ellos con todos los escalares iguales a cero.
c) Dos o más vectores son linealmente ...**dependientes**..................... si y sólo si el vector nulo se expresa como combinación de ellos con al menos uno de los escalares distinto de cero.

10) opción a)
11) opción c)
12) opción c)

13) a) V   b) no va   c) V   d) F (el vector debe ser distinto del nulo)

14)Los escalares deben ser todos iguales a cero, pues los vectores son L.I.

15)Existen infinitas formas de expresión, es decir infinitos escalares, pues los vectores son L.D

16)Opción b)
17)Opción b)
18) a) V   b) V