SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Antes de resolver este práctico, revise los siguientes puntos:

- Sistemas de ecuaciones lineales. Forma matricial.
- Matriz ampliada. Sistemas equivalentes.
- Método de Gauss-Jordan.
- Teorema de Rouche-Frobenius.
- Método de la inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

1) En cada una de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales plantee la forma matricial.

a) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 1 = 5y \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2z + 4w = -2 \\ 3z - 6w = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - z = y \\ y + z = -x \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

2) Resolver por Gauss-Jordan realizando el correspondiente análisis de rango.

a) $\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x + 2y = -z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x = -y - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - y = 2 \\ 3x + 3y = 0 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ y - 3 = x \end{cases}$ f) $\begin{cases} t - 2w = u \\ 2t + w - u = 0 \\ 3t - w - 2u = 1 \end{cases}$

3) Las siguientes son matrices ampliadas de sistemas de ecuaciones, luego de efectuar operaciones elementales por filas, establezca en cada caso el tipo de sistema del que se trata y encuentre la solución.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ f) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

g) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ i) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

4) Resolver por el Método de la inversa los siguientes sistemas

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x - y + 4z = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2w + 2y = 2 \\ -w + y = -3 \end{cases}$$

5) ¿Cuál debe ser el valor de "c" para que el siguiente sistema sea compatible indeterminado?

$$\begin{cases} x - y = c \\ -x = -y - 1 \end{cases}$$

6) ¿Cuál debe ser el valor de "c" para que el siguiente sistema sea incompatible?

$$\begin{cases} 2x - 2y = c \\ -x = -y - 1 \end{cases}$$

7) Dado un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, $Ax=B$, tal que $r(A) = r(A|B)$, entonces el sistema es:

a) compatible determinado o compatible indeterminado.
b) no se puede contestar por falta de datos.
c) compatible determinado.
d) compatible indeterminado.
e) incompatible.

8) Sea $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

la matriz ampliada reducida de un sistema de ecuaciones lineales, se puede afirmar que el sistema:

a) Es compatible determinado con única solución la trivial.
b) Es compatible determinado con única solución (2, -3, 0)
c) Es compatible indeterminado con solución (0, 0, z) , para todo z real.
d) Es compatible indeterminado con solución (2, -3, z) , para todo z real.
e) Es compatible indeterminado con solución (2z, -3z, z) , para todo z real.

9) Sea
$$\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

la matriz reducida ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, se puede afirmar que el sistema:

a) tiene por única solución la trivial.
b) tiene infinitas soluciones.
c) es incompatible.
d) su solución se puede expresar como x=3 , y= 0 , z=0
e) su solución se puede expresar como x=3 , y= 0

10) Sea
$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz reducida ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, compatible indeterminado, entonces la solución (x, y ,z) , se puede expresar como:

a) (-3 z, 5 z , 0) b) (-3 z, 5 z , z)

c) (0 , 0 , z) d) (3 z, -5 z , 0) e) (3 z, -5 z , z)

11) Sea
$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz reducida ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, se puede afirmar que el sistema:

a) tiene por única solución la trivial.
b) tiene infinitas soluciones.
c) es incompatible.
d) su solución se puede expresar como x=-1 , y= 2 , z=0
e) su solución se puede expresar como x=-1 , y= 2 , z=1

12) Dado un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, Ax=B , tal que r(A) = r(A|B) > n , entonces el sistema es:

a) compatible determinado.
b) compatible indeterminado.

c) incompatible.
d) compatible determinado o compatible indeterminado.
e) es imposible que se de esta situación.

13) Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales del tipo A x = B, si la matriz reducida de A es la identidad, cual de las siguientes afirmaciones es falsa;

a) El sistema tiene solución única.
b) El determinante de A es nulo.
c) El rango de A es igual al número de columnas de A.
d) El rango de A es igual al número de filas de A.
e) El sistema se puede resolver por el método de la inversa.

14) El Teorema de Rouche-Frobenius afirma que:

a) Si dos matrices son equivalentes entonces tienen el mismo rango.
b) Si dos matrices son equivalentes entonces tienen el mismo determinante.
c) Si el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales entonces el sistema es compatible.
d) Si un sistema tiene solución entonces el sistema es compatible.
e) Si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero entonces el sistema es compatible.

15) ¿Cuál debe ser el valor de " k " para que el siguiente sistema sea incompatible ?

$$\begin{cases} x - y + k = 0 \\ 4x - 4y = 1 \end{cases}$$

a) 0
b) 1/4
c) -1/4
d) cualquier número real distinto de 1/4
e) cualquier número real distinto de -1/4

16) Considerando el sistema expresado en forma matricial A x = B con rango de A igual al rango de la matriz ampliada, entonces:

a) el sistema es compatible determinado.
b) el sistema es compatible indeterminado.
c) el sistema es incompatible indeterminado.
d) el sistema es incompatible.
e) el sistema es compatible.

17) En un sistema homogéneo con única solución:

a) El rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas
b) El rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas
c) El rango de la matriz de coeficientes es mayor que el número de incógnitas
d) El rango de la matriz de coeficientes es menor que el rango de la ampliada
e) El rango de la matriz de coeficientes es mayor que el rango de la ampliada

18) Si un sistema de m ecuaciones lineales con p incógnitas (expresado en forma matricial $A X = B$) es compatible indeterminado entonces:

a) $r(A) > r(A|B) = m$
b) $r(A) = r(A|B) < m$
c) $r(A) = r(A|B) = m$
d) $r(A) = r(A|B) < p$
e) $r(A) < r(A|B) = p$

19)¿Cuándo un sistema se denomina homogéneo?

20) Considere un sistema de ecuaciones lineales de la forma $AX = B$, suponiendo que existe la matriz inversa de A, entonces cómo obtiene el vector X?

21) Un sistema homogéneo

a) tiene al menos una solución no trivial;
b) tiene al menos la solución trivial.
c) es siempre incompatible;
d) no puede ser compatible;
e) no puede ser indeterminado;

Respuestas:

a) Sistema compatible determinado $X = (3, 1)$
b) Sistema compatible indeterminado $X = (1 + 2y, y)$, $y \in \mathbf{R}$
c) Sistema incompatible (no admite solución)

2)
a) Sistema compatible indeterminado $X = (-z, z, z)$, $z \in \mathbf{R}$
b) Sistema compatible indeterminado $X = (1 + y, y)$, $y \in \mathbf{R}$
c) Sistema incompatible
d) Sistema compatible determinado $X = (1, -1)$
e) Sistema compatible indeterminado $X = (-3 + y, y, -1)$, $y \in \mathbf{R}$
f) Sistema incompatible

3)
a) Sistema compatible determinado $X = (2, 3)$
b) Sistema compatible determinado $X = (0, 0)$
c) Sistema incompatible (no admite solución)
d) Sistema incompatible
e) Sistema compatible indeterminado $X = (2 - z, 3, z)$, $z \in \mathbf{R}$
f) Sistema compatible indeterminado $X = (3 - 2y, y)$, $y \in \mathbf{R}$
g) Sistema compatible determinado $X = (2, 0)$
h) Sistema incompatible
i) Sistema incompatible

4) b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vector solución

5) c = 1

6) c ≠ 2

7) a)	**15) e)**
8) e)	**16) e)**
9) b)	**17) b)**
10) b)	**18) d)**
11) d)	**19) Cuando el vector de términos independientes es el nulo.**
12) e)	**20) X se obtiene a través del producto A^{-1}. B**
13) b)	**21) b)**
14) c)	