

DETERMINANTE

1) Calcule el determinante de las siguientes matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Aplique propiedades para obtener los siguientes determinantes.
(las matrices son las correspondientes al ej 1)

- a) $2A$ c) B' e) $3(A - B)$
b) $A \cdot B$ d) $D \cdot D'$ d) $100(A + C)$

3) Calcule el determinante de las siguientes matrices (Aplique propiedades)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

4) Si el determinante de cierta matriz A 4×4 es 5; cual ser el determinante de la matriz B que se obtiene a partir de A realizando los siguientes cambios:

- a) B se obtiene intercambiando dos filas de A .
b) B se obtiene multiplicando una fila de A por $1/3$.
c) B se obtiene restando a la primera fila de A , la segunda fila multiplicada por 2.

5) Sean A y B dos matrices de orden n , I la identidad. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) $|A + A| = 2n |A|$ b) $|A'| = |A|$ c) $|I| = 1$

d) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ e) $|A + B| = |A| + |B|$

6) ¿Cuál de las siguientes operaciones preserva el valor del determinante?

- a) Multiplicar una fila por una constante no nula.
- b) Multiplicar una fila por cero.
- c) Sumar a una fila otra fila.
- d) Sumar a una fila una constante no nula.
- e) Intercambio de filas.

7) De acuerdo a la definición general de determinante de una matriz de orden n, cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- a) Cada término posee un elemento de cada columna de la matriz.
- b) Cualquiera sea el n, su cálculo es equivalente a aplicar la regla de Sarrus.
- c) El determinante es una suma de productos.
- d) Cada término resulta del producto, de cierto signo por “n” coeficientes de la matriz original.
- e) Cada término posee un elemento de cada fila de la matriz.

8) Siendo

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

su determinante es:

- a) -4 b) 4 c) 8 d) -8 e) 0

9) Siendo

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

su determinante es:

- a) -4 b) 4 c) 8 d) -8 e) 0

10) Sabiendo que A y B son dos matrices de orden 3 con $|A| = -2$ $|B| = -3$ cuál es el valor del determinante de la matriz $(-2 A B)$.

- a) 6 b) -6 c) -12 d) 48 e) -48

11) ¿Cuál debe ser el valor de k para que el determinante de la siguiente matriz sea cero?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & k \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) No existe ningún valor de k.
b) Existen infinitos valores de k.
c) $k = 2$
d) $k = -2$
e) $k = 0$

12) Indique que le ocurre al determinante de una matriz cuando se le efectúa alguna de las siguientes operaciones.

- a) Intercambio de dos columnas de A.
b) Adición de una constante a una fila.
c) Restar a una columna una constante por otra columna.
d) Multiplicar una columna de A por una constante.
e) Reemplazar una línea por la suma de dos líneas paralelas.

13) ¿Cuántos términos involucra el cálculo del determinante de una matriz 5x5, de acuerdo a la definición formal?

14) Encuentre el valor de k para que el determinante de la siguiente matriz sea DISTINTO DE CERO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix}$$

15) Sólo uno de los siguientes productos puede representar uno de los términos del cálculo de un determinante de una matriz 3x3. Justifique.

- a) $-a_{11} a_{22} a_{33}$ b) $a_{12} a_{22} a_{33}$ c) $-a_{13} a_{22} a_{31}$ d) $a_{11} a_{23} a_{32}$ e) $a_{11} a_{12} a_{33}$

16) ¿Cuál es el valor del determinante de la siguiente matriz? $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

17) ¿Cuál es el valor de k para que la siguiente matriz sea no singular? $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

MATRIZ INVERSA

1) Encuentre, si existe, la inversa de cada una de las siguientes matrices.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Siendo A, B y C matrices con A inversible e I la matriz identidad, entonces: cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$
- b) $A \cdot B = C \implies B = C \cdot A^{-1}$
- c) $I = A^{-1} \cdot A$
- d) Si $A \cdot B = I = B \cdot A \implies B = A^{-1}$
- e) $(A + C) \cdot A^{-1} = I + C \cdot A^{-1}$

3) Indique la afirmación incorrecta.

- a) La matriz reducida de una matriz inversible, es la identidad.
- b) El determinante de una matriz inversible es siempre igual a 1.
- c) El rango de una matriz inversible es el orden de la matriz.
- d) La matriz inversa si existe es única.
- e) Si una matriz es no singular entonces es inversible.

4) Si A es la matriz inversa de B y B es la matriz inversa de C podemos afirmar que:

- a) $A = B$
- b) $A \cdot C = C \cdot A^{-1}$
- c) $A \cdot C = I$
- d) $A = C$
- e) $C = I$

5) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$$

¿Cuál debe ser el valor de k para que A no tenga inversa?

6) ¿Cuál debe ser el valor de k para que la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sea la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ k & k \end{pmatrix}$

7) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones, en general, son verdaderas y cuáles falsas?

- a) $A = A^{-1}$, con $|A| \neq 0 \Rightarrow A = I$
- b) Si B y C son inversas de A entonces $B = C$.
- c) $A \cdot A' = I$
- d) Una matriz y su inversa tienen la misma matriz escalonada reducida por filas.
- e) La inversa de una matriz diagonal es otra matriz diagonal.
- f) La inversa de una matriz, si existe, es única.
- g) La inversa de la inversa es igual a la matriz original.
- h) Una matriz y su reducida tienen la misma matriz inversa.
- i) La inversa de una matriz diagonal es otra matriz diagonal.
- j) La inversa de la transpuesta es igual a la transpuesta de la inversa.

8) Si A tiene por matriz reducida a una matriz B con $|B| = 0$, entonces:

- a) A tiene un línea nula.
- b) A tiene inversa.
- c) A es regular.
- d) A es singular.
- e) no se puede establecer ninguna característica de A.

RANGO DE UNA MATRIZ

1) Obtenga una matriz equivalente por filas en cada caso:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Indique cual/les de las siguientes matrices es/son escalonada reducida por filas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Establezca la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

- a) Matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango.
 b) Matrices equivalentes por filas tienen el mismo determinante.
- 4) En cada una de las matrices dadas en el ejercicio 2 determine el rango.
- 5) Determine el rango de cada una de las siguientes matrices.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

6) ¿Cuál es el rango de la matriz A?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7) Una matriz escalonada reducida por filas:

- a) Tiene el primer elemento no nulo de cada fila igual uno.
 b) Debe ser igual a la identidad.
 c) Solo puede contener ceros y unos.

- d) Tiene el primer elemento no nulo de cada columna igual uno.
- e) Todas las anteriores son correctas.

8) El rango de una matriz es:

- a) el número de filas no nulas de la matriz.
- b) el número de filas nulas de la matriz.
- c) el número de filas no nulas de la matriz reducida.
- d) el número de filas nulas de la matriz reducida.
- e) el número de filas linealmente dependientes de la matriz.

9) El rango de la siguiente matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{es: a) 0} \quad \text{b) 1} \quad \text{c) 2} \quad \text{d) 3} \quad \text{e) 4}$$

10) Dos matrices se dicen equivalentes por fila cuando:

- a) tienen el mismo rango.
- b) tienen el mismo determinante.
- c) una se obtiene a partir de la otra mediante operaciones elementales por fila.
- d) son iguales.
- e) tienen el mismo número de filas y de columnas.

11) Si dos matrices cuadradas tienen el mismo rango se puede asegurar que:

- a) tienen el mismo determinante.
- b) tienen la misma matriz inversa.
- c) tienen la misma cantidad de filas Linealmente independientes.
- d) tienen la misma matriz ampliada.
- e) tienen la misma cantidad de filas no nulas.

12) Sea A de orden n tal que su determinante es nulo, entonces:

- a) $r(A) = n$
- b) $r(A) < n$
- c) A es no singular.
- d) A es regular.
- e) A posee inversa.

13) La siguiente matriz , $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Está escalonada, reducida por filas y su rango es 4.
- b) Está escalonada pero no reducida por filas y su rango es 3.
- c) Está reducida, pero no escalonada por filas y su rango es 3.
- d) Está escalonada, pero no reducida por filas y su rango es 4.
- e) No está escalonada ni reducida por filas y su rango es 3.

14) Si A es una matriz de $m \times n$, B otra matriz, ¿cuál de las siguientes expresiones simbólicas es verdadera y cuál es falsa?

- a) $r(A \cdot B) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- b) $r(A) \leq \min\{m, n\}$
- c) $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$
- d) $r(A \cdot A') = r(A) \cdot r(A')$
- e) Si I es la matriz identidad de orden n , entonces $r(I) = n$.
- f) Matrices equivalentes por filas tienen el mismo rango.
- g) Matrices equivalentes por filas tienen la misma inversa.
- h) Si se multiplica A por su inversa obtiene la matriz identidad.
- i) Dos matrices de distinto orden NO pueden ser equivalentes por filas.
- j) Matrices equivalentes por filas tiene la misma matriz reducida escalonada por filas.

Respuestas:

1) $|D| = 2$; $|E| = -14$; $|F| = -1$; $|A| = 2$; $|B| = 30$; $|C| = 3$

2)

- a) $|2A| = 2^3 |A| = 16$
- b) $|AB| = |A| |B| = 60$
- c) $|B'| = |B| = 30$
- d) $|DD'| = |D| |D'| = |D|^2 = 4$
- e) $|3(A - B)| = 3^3 |A - B| = 0$
- f) $|100(A + C)| = 100^3 |A + C| = 0$

- 3) $|A| = -2$ (intercambiando filas se obtiene una matriz diagonal) ;
 $|B| = 6$ (matriz triangular);
 $|C| = 0$ (la matriz tiene una fila nula);
 $|D| = 0$ (la matriz tiene dos filas proporcionales)

4) a) -5 ; b) $5/3$; c) 5

5) a) ; e) son falsas

- 6) c)
- 7) b)
- 8) a)
- 9) b)
- 10) e)
- 11) d)

- 12) a) cambia el signo
 d) cambia
 e) no cambia
 f) el determinante queda multiplicado por la constante.
 g) Se anula.

13) no va

14) k distinto de 5

15) c)

16) -7

17) k distinto de 2

Respuestas:

1)

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad E^{-1} \text{ no existe} ; \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 3/11 & -5/11 \\ -1/11 & -2/11 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \text{ no existe} ; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

2) b) 3) b) 4) d) 5) k=-6 6) k= 1 7) falsas: c) ; h) 8) d)

Respuestas:

3) Existen infinitas posibilidades de respuestas

2) Matrices escalonadas reducidas por filas: a) ; b) ; d) ; f) ; g)

3) a) verdadera ; b) falsa

4) a) 2 ; b) 3 ; c) 4 ; d) 1 ; e) 2 ; f) 3 ; g) 2 ; h) 3

5) $r(D) = 2$; $r(E) = 2$; $r(F) = 2$; $r(A) = 3$; $r(B) = 3$; $r(C) = 3$

$r(A_1) = 4$; $r(B_1) = 4$; $r(C_1) = 3$; $r(D_1) = 3$

Observar:

Si el determinante de una matriz es distinto de cero entonces la matriz tiene rango máximo, es decir el rango es igual al orden de la matriz. ¿Porqué?

6) b) ; 7) a) ; 8) c) ; 9) b) ; 10) c) ; 11) c) ; 12) b) ; 13) d) ; 14) falsas d) , h)