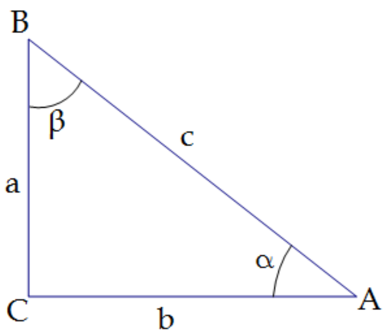
TRIGONOMETRÍA

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

A.1 Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo:



Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo son las siguientes funciones:

La función seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente.

Todas ellas pueden entenderse como relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo.

Veamos las expresiones de cada una de ellas referidas a los ángulos α y β del triángulo rectángulo aquí representado:

a) Para el ángulo α:

función seno	función coseno	función tangente
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{c}$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$
función cosecante	función secante	función cotangente
$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{c}{a}$	$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{c}{b}$	$\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{b}{a}$

b) Para el ángulo β:

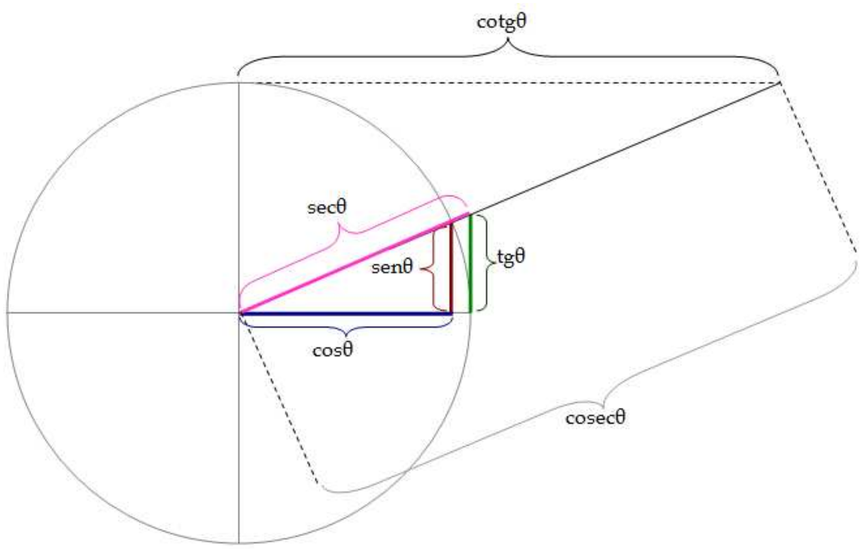
función seno	función coseno	función tangente
$\mathrm{sen}\beta = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$	$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$
función cosecante	función secante	función cotangente
$\mathrm{cosec}\beta = \frac{1}{\mathrm{sen}\beta} = \frac{c}{b}$	$\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{c}{a}$	$\mathrm{cotg}\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{a}{b}$

A.2. Valores del seno, coseno y tangente para ciertos ángulos significativos (en grados y radianes)

ángulo		sen	cos	tg	ángulo		sen	cos	tg
0º	0 rad	0	1	0	60º	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
30º	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	90	$\frac{\pi}{2}$ rad	1	0	∞
45º	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	180º	π rad	0	–1	0

A.3. Significado geométrico de las razones trigonométricas en la esfera goniométrica

Se llama *circunferencia goniométrica* a aquella que tiene por radio la unidad. Para una circunferencia goniométrica es posible dar un sentido muy intuitivo a todas las razones trigonométricas. Vamos a verlo mediante el siguiente dibujo.



A.4. Relaciones entre las razones trigonométricas

a) Relaciones fundamentales:

El seno, el coseno y la tangente de un ángulo están relacionados mediante la siguiente igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

Por otro lado, se cumple la siguiente igualdad, estrechamente vinculada al teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

b) Relaciones del ángulo suma–diferencia:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

c) Relaciones del ángulo doble

Es un caso particular del anterior en el que α y β son iguales.

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

d) Relaciones del ángulo mitad

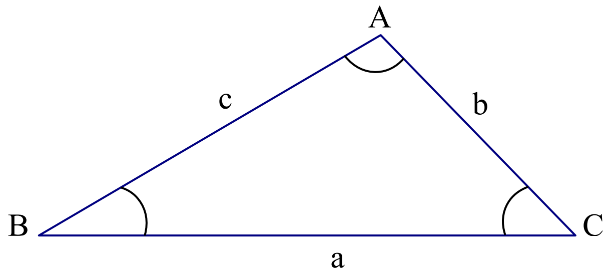
$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

A.5. Resolución de triángulos: Teoremas del seno y del coseno

Sea el siguiente triángulo. ¡No hace falta que sea rectángulo! Se verifican las siguientes dos expresiones, conocidas como *teorema del seno* y *teorema del coseno*.



a) Teorema del seno: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen}C}$

b) Teorema del coseno: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

B. EJERCICIOS RESUELTOS

B.1. Cálculo de razones trigonométricas

1. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha=0{,}86$ calcula las demás razones trigonométricas directas e inversas

Solución:

Las razones trigonométricas directas son el *seno*, el *coseno* y la *tangente*, y las inversas la *cosecante*, la *secante* y la *cotangente*. Vamos a relacionar todas ellas con el seno, que es el dato que nos dan:

- $\operatorname{sen}\alpha=0{,}86$

- El coseno se deduce a partir de la ecuación fundamental $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

  $$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$

  Sustituyendo datos:

  $$\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-0,86^2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

- La tangente buscada se deduce de la fórmula fundamental $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$. Sólo hay que sustituir en ella los valores conocidos:

  $$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{0,86}{0,5} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 1,72$$

- La cosecante es la inversa del seno.

  $$\operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\alpha = \frac{1}{0,86} = 1,26$$

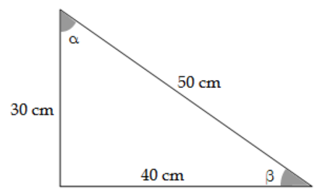
- La secante es la inversa del coseno.

  $$\sec\alpha = \cos^{-1}\alpha = \frac{1}{1/2} = 2$$

- La cotangente es la inversa de la tangente.

  $$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\alpha = \frac{1}{1,72} = 0,58$$

2. Calcula las relaciones trigonométricas directas de α y β



<u>Solución</u>:

Las razones trigonométricas directas son el *seno*, el *coseno* y la *tangente*.

- Para el ángulo α:

  $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{40}{50} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0,8,$$
  $$\cos\alpha = \frac{30}{50} \Rightarrow \cos\alpha = 0,6$$
  $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{40}{30} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1,33$$

  Observa que se cumple que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- Para el ángulo β:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{30}{50} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = 0,6$$

$$\cos\beta = \frac{40}{50} \Rightarrow \cos\beta = 0,8$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{30}{40} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 0,75$$

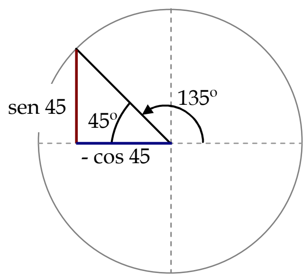
Observa que también se cumple que $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$, como no podía ser de otra manera.

3. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- 135º

Solución:

El ángulo 135º está en el 2º cuadrante. Será equivalente a un ángulo de 45º para el que sen45 es positivo y cos45 es negativo, tal como se indica en la figura.



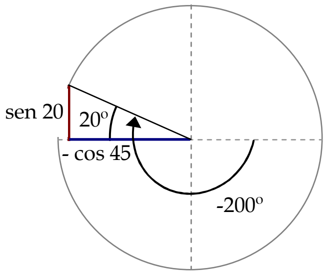
- - 560º

Solución:

Como el ángulo es mayor que 360º lo tratamos del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l|l} 560 & 360 \\ \hline 200 & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \text{ vuelta} \cdot 360^{\circ} + 200^{\circ}$$

El ángulo que tenemos que manejar es -200º. Ello es equivalente a un ángulo de 20º en el segundo cuadrante, en donde sen20 es positivo y cos20 es negativo



4. Sabiendo que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y que α está en el 4º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Solución:

Si α está en el 4º cuadrante entonces $\cos\alpha$ es positivo y $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo.

El $\operatorname{sen}\alpha$ lo deducimos usando la relación fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Así: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\left(1 - \dfrac{3}{4}\right)} = -\dfrac{1}{2}$

El resto de razones trigonométricas se obtiene de forma inmediata:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\sqrt{3};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{co}\sec\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = -2$$

5. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y que α está en el 2º cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Solución:

Si α está en el 2º cuadrante entonces $\cos\alpha$ es negativo y $\operatorname{sen}\alpha$ es positivo.

- Utilizamos la relación $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ para hallar $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Hallamos $\cos\alpha$ a partir de $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$:

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{3}{2}.$$

- Las obtención de las razones trigonométricas inversas es inmediata:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{2}{3};\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}};\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\sqrt{3}$$

6. Si α está en el tercer cuadrante y $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$, determina las siguientes razones trigonométricas:

- $\operatorname{sen}(180^{\circ} - \alpha)$

  Solución:

  Como α está en el tercer cuadrante el $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo, como bien indica el enunciado. Pero, en general, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180 - \alpha)$, así que $\operatorname{sen}(180 - \alpha) = -\frac{1}{2}$

- $\operatorname{sen}(180^{\circ} + \alpha)$

  Solución:

  Como α está en el tercer cuadrante el $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo. Además: $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(180 - \alpha)$, así que $\operatorname{sen}(180 - \alpha) = \frac{1}{2}$

- $\cos(180^{\circ} - \alpha)$

  Solución:

  Como α está en el tercer cuadrante $\cos\alpha$ es negativo. Además: $\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha)$.

  Deduzcamos $\cos\alpha$:

  Usamos la relación fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

Entonces, $\cos(180-\alpha)=\frac{3}{4}$

- $\cos(180^{o}+\alpha)$

Solución:

Se cumple que $\cos\alpha=-\cos(180+\alpha)$. Entonces:

$$-\frac{3}{4}=-\cos(180+\alpha)\Rightarrow\cos(180+\alpha)=\frac{3}{4}$$

- $\text{tg}(180^{o}-\alpha)$

Solución:

$$\text{tg}(180^{o}-\alpha)=\frac{\text{sen}(180^{o}-\alpha)}{\cos(180^{o}-\alpha)}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

- $\text{tg}(180^{o}+\alpha)$

Solución:

$$\text{tg}(180^{o}+\alpha)=\frac{\text{sen}(180^{o}+\alpha)}{\cos(180^{o}+\alpha)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

B.2. Demostración de igualdades trigonométricas:

7. $\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\text{tg }\alpha+3\sec\ \alpha}=\cos\ \alpha$

Solución:

- Vamos a tratar de manipular el lado izquierdo de la igualdad, para convertirlo en $\cos\ \alpha$. Teniendo en cuenta que $\text{tg }\alpha=\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\ \alpha}$ y que $\sec\ \alpha=\frac{1}{\cos\ \alpha}$, podemos escribir:

$$\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\text{tg }\alpha+3\sec\ \alpha}=\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\ \alpha}+\frac{3}{\cos\ \alpha}}$$

- Operamos esa expresión con el fin de simplificarla:

$$\frac{2\text{sen }\alpha+3}{2\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3}{\cos\alpha}}=\frac{2\text{sen }\alpha+3}{\frac{2\text{sen }\alpha+3}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha\,\cancel{(2\text{sen }\alpha+3)}}{\cancel{2\text{sen }\alpha+3}}=\cos\alpha$$

- Como acabamos de ver, la igualdad se cumple.

8. $\text{tg}^2\alpha=\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}$

<u>Solución:</u>

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=\text{tg}^2\alpha=\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

En $B=\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}$ vamos a reescribir el denominador de una forma más conveniente:

Teniendo en cuenta que $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ se deduce que $1-\text{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha$. Entonces:

$$B=\frac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}=\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Observamos que A=B, luego la identidad es verdadera.

9. $\text{tg}(\alpha)\cdot\text{cotg}(\alpha)-\dfrac{2\text{sen}(\alpha)}{\sqrt{1+\text{cotg}^2(\alpha)}}=[\cos(\alpha)+\text{sen}(\alpha)]\cdot\left(\dfrac{1}{\sec(\alpha)}-\dfrac{1}{\text{cosec}(\alpha)}\right)$

<u>Solución:</u>

Vamos a manipular primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=tg(\alpha)\cdot cotg(\alpha)-\frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{1+cotg^2(\alpha)}}=tg(\alpha)\cdot\frac{1}{tg(\alpha)}-\frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{1+\frac{1}{tg^2(\alpha)}}}=$$

$$=1-\frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{1+\frac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}}}=1-\frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{\frac{sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}}}=1-\frac{2\cdot sen(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{sen^2(\alpha)}}}=$$

$$=1-2\cdot sen^2(\alpha)$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B=[cos(\alpha)+sen(\alpha)]\cdot\left(\frac{1}{sec(\alpha)}-\frac{1}{cosec(\alpha)}\right)=$$

$$=[cos(\alpha)+sen(\alpha)]\cdot[cos(\alpha)-sen(\alpha)]=$$

$$=cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)=1-sen^2(\alpha)-sen^2(\alpha)=1-2\cdot sen^2(\alpha)$$

Observamos que A=B, luego la identidad es cierta.

10. $\dfrac{1}{sec^2\alpha}=sen^2\alpha\cdot cos^2\alpha+cos^4\alpha$

Solución:

Manipulamos primeramente el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$$A=\frac{1}{sec^2\alpha}=cos^2\alpha$$

Manipulamos el miembro de la derecha, que llamaremos B:

$$B=sen^2\alpha\cdot cos^2\alpha+cos^4\alpha=\left(sen^2\alpha+cos^2\alpha\right)\cdot cos^2\alpha=cos^2\alpha$$

Observamos que A=B, luego la identidad es cierta.

11. $cosec^4\alpha-1=2cotg^2\alpha+cotg^4\alpha$

Solución:

Manipulamos el miembro de la izquierda, que llamaremos A:

$A = \operatorname{cosec}^4\alpha - 1 = \left(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1\right)\left(\operatorname{cosec}^2\alpha + 1\right)$

Recordamos que $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha$. Entonces:

$\left(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1\right)\left(\operatorname{cosec}^2\alpha + 1\right) = \left(1 + \operatorname{cotg}^2\alpha - 1\right)\left(1 + \operatorname{cotg}^2\alpha + 1\right) =$

$= \operatorname{cotg}^2\alpha\left(\operatorname{cotg}^2\alpha + 2\right) = \operatorname{cotg}^4\alpha + 2\operatorname{cotg}^2\alpha$.

Hemos llegado a obtener el lado B de la expresión dada, luego se ha demostrado que la igualdad es cierta.

12. $\operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

Solución:

Partiendo del miembro de la izquierda, que llamaremos A, mediante manipulaciones adecuadas llegaremos al miembro de la derecha:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha = 2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\alpha =$$

$$= 2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = 2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$= \dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$. Queda así demostrado.

13. $\dfrac{2\cdot\operatorname{sen} x + 3}{2\cdot\operatorname{tg} x + 3\cdot\sec x} = \cos x$

Solución:

Partiendo del miembro de la izquierda, que llamaremos A, mediante

B.3. Ecuaciones trigonométricas

14. Resuelve: $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

$$x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^o = \dfrac{\pi}{3} \\ x_2 = 180^o - 60^o = 120^o = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

15. Resuelve: $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Solución:

$$x = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^o = 45^o \cdot \dfrac{\pi}{180^o} = \dfrac{\pi}{4} \\ x_2 = 360^o - 45^o = 315^o = 315^o \cdot \dfrac{\pi}{180^o} = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

16. $\text{tg}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Solución:

$$x = \text{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^o = 30^o \cdot \dfrac{\pi}{180^o} = \dfrac{\pi}{6} \\ x = 30^o + 180^o = 210^o = \dfrac{\pi}{7} \end{cases}$$

17. Resuelve la ecuación $\cos 2x = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

- Hay que recordar que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$. Así:

  $\cos 2x = \text{sen } x \Rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen } x$

- Por otro lado, hay que tener en cuenta que $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$. Por ello:

  $$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen } x \Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = \text{sen } x \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} =$$

  $$= \begin{cases} \text{sen } x = -1 \\ \text{sen } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Finalmente estudiamos cada uno de estos dos casos:

Si $\text{sen } x = -1$, entonces: $x_1 = \frac{3\pi}{2}$

Si $\text{sen } x = \frac{1}{2}$, entonces: $x_2 = \frac{\pi}{6}$ y $x_3 = \frac{5\pi}{6}$

18. Resuelve la ecuación $\text{sen } 2x \cdot \cos x = 6\text{sen}^3 x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

- Hay que recordar que $\text{sen } 2x = 2\text{sen } x \cdot \cos x$. Así:
  $\text{sen } 2x \cdot \cos x = 6\text{sen}^3 x \Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6\text{sen}^3 x \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos^2 x = 6\text{sen}^3 x$

- Por otro lado, hay que tener en cuenta que $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$. Por ello:

$$2 \cdot \text{sen } x \cdot (1 - \text{sen}^2 x) = 6 \cdot \text{sen}^3 x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen } x \cdot (1 - \text{sen}^2 x) = 3 \cdot \text{sen } x \cdot \text{sen}^2 x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen } x \cdot (4 \cdot \text{sen}^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen } x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Finalmente estudiamos cada uno de estos tres casos:

Si $\text{sen } x = 0$, entonces: $x_1 = 0$

Si $\text{sen } x = \frac{1}{2}$, entonces: $x_2 = \frac{\pi}{6}$ y $x_3 = \frac{5\pi}{6}$

Si $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$, entonces: $x_4 = \frac{7\pi}{6}$ y $x_5 = \frac{11\pi}{6}$

19. Resuelve: $\cos 2x - \cos 6x = \text{sen}5x + \text{sen}3x$

Solución:

- Vamos a utilizar las siguientes relaciones:

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \text{sen}\frac{A+B}{2} \cdot \text{sen}\frac{A-B}{2}$$
$$\text{sen}A - \text{sen}B = 2 \cdot \text{sen}\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$$

- Entonces:

$$\cos 2x - \cos 6x = -2\cdot \operatorname{sen}\frac{2x+6x}{2}\cdot \operatorname{sen}\frac{2x-6x}{2}$$
$$\operatorname{sen}5x - \operatorname{sen}3x = 2\cdot \operatorname{sen}\frac{5x+3x}{2}\cdot \cos\frac{5x-3x}{2}$$

- Sustituimos lo obtenido en la ecuación dada y pasamos todo a un miembro

$$-2\cdot \operatorname{sen}(4x)\cdot \operatorname{sen}(-2x) = 2\cdot \operatorname{sen}(4x)\cdot \cos(x)$$

- Si tenemos en cuenta que $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen}(a)$ y sacamos factor común, entonces:

$$2\cdot \operatorname{sen}(4x)\cdot[\operatorname{sen}(2x)-\cos(x)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot \operatorname{sen}(4x) = 0 \\ \operatorname{sen}(2x)-\cos(x) = 0 \end{cases}$$

- Resolvemos la primera ecuación de las dos:

$$2\cdot \operatorname{sen}(4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0+2k\pi \Rightarrow x = k\dfrac{\pi}{2} \\ 4x = \pi+2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Resolvemos la segunda ecuación:

$$\operatorname{sen}(2x)-\cos(x) = 0 \Rightarrow 2\cdot \operatorname{sen}(x)\cos(x)-\cos(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2\cdot \operatorname{sen}(x)-1]\cos(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \\ 2\cdot \operatorname{sen}(x)-1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

La solución es entonces la unión de todas estas soluciones.

20. Resuelve el siguiente sistema en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ 2x+2y = \pi \end{array}\right\}$$

<u>Solución:</u>

- Despejamos x en la segunda ecuación y llevaremos su valor a la primera ecuación:

$2x+2y=\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-y$, por lo que:

$\text{sen } x+\text{sen } y=1 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\text{sen } y=1$

- Ahora, para poder simplificar esta expresión usamos la fórmula del seno de la diferencia de dos ángulos:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\text{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\cos y-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\text{sen} y=\cos y$, es decir:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\text{sen } y=1 \Rightarrow \cos y+\text{sen} y=1$

- Intentamos expresar el coseno en función del seno, elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación:

$(\cos y+\text{sen} y)^2=1^2 \Rightarrow \cos^2 y+\text{sen}^2 y+2\cdot\text{sen} y\cos y=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1+2\cdot\text{sen } y\cos\ y=1 \Rightarrow \text{sen } y\cos\ y=0$

Pero $\text{sen } y\cos\ y=\text{sen } 2y$, por lo que $\text{sen } y\cos\ y=0 \Rightarrow \text{sen } 2y=0$

- Las soluciones para $\text{sen } 2y=0$ están dadas por: $2y=0$ y $2y=\pi$, esto es: $y_1=0$; $y_2=\frac{\pi}{2}$. Teniendo en cuenta que $x=\frac{\pi}{2}-y$, entonces:

$y_1=0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}$

$y_2=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2=0$

21. Calcula las soluciones del siguiente sistema, en el intervalo $[0,2\pi]$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } x=2\cdot\text{sen } y\\ x-y=\frac{\pi}{3}\end{array}\right\}$$

Solución:

- Despejamos x en la segunda ecuación y llevaremos su valor a la primera ecuación:

$$x-y=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+y \text{, por lo que:}$$

$$\text{sen } x=2\cdot\text{sen } y\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)=2\cdot\text{sen } y$$

- Usamos la fórmula del seno de la suma de dos ángulos en el miembro izquierdo de la ecuación:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)=\text{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\cos y+\cos\frac{\pi}{3}\cdot\text{sen} y=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y+\frac{1}{2}\text{sen} y$$

Entonces la fórmula a resolver es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y+\frac{1}{2}\text{sen} y=2\text{sen} y\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y=\frac{1}{2}\text{sen} y\Rightarrow\sqrt{3}=\text{tg } y$$

Solución: $\text{tg } y=\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}y_1=60^{\circ}=\dfrac{\pi}{3}\\ y_2=180^{\circ}+60^{\circ}=\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$

22. Calcula las soluciones del siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{l}4y\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x=3\\ 2y\cdot\cos\ 2x=\sqrt{3}\end{array}\right\}$$

<u>Solución:</u>

- Dividimos las dos ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l}4y\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x=3\\ 2y\cdot\cos\ 2x=\sqrt{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{4y\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x}{2y\cdot\cos\ 2x}=\frac{3}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{2\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x}{\cos\ 2x}=\sqrt{3}$$

- Recordamos que $2\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x=\text{sen } 2x$ y sustituimos en la ecuación:

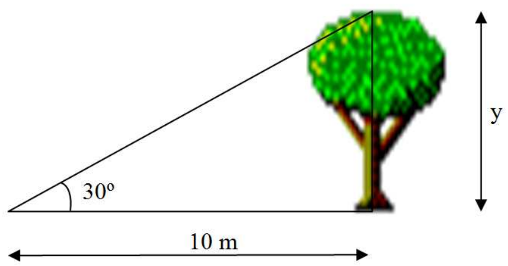
$$\frac{2\cdot\text{sen } x\cdot\cos\ x}{\cos\ 2x}=\frac{3}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\text{sen } 2x}{\cos\ 2x}=\sqrt{3}\Rightarrow\text{tg } 2x=\sqrt{3}$$

- Despejamos x:

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

B.4. Problemas

23. Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de 30º.

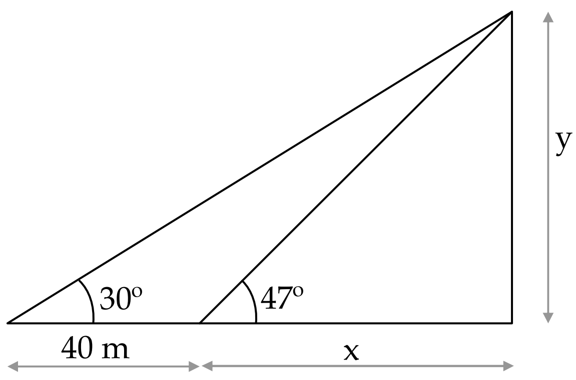


Solución:

La altura, **y**, del árbol la deducimos de la relación siguiente:

$$\mathrm{tg}30 = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \cdot \mathrm{tg}30 \Rightarrow y = 5{,}77 \text{ m}$$

24. Calcula x e y:



Solución:

Aplicamos la relación $\mathrm{tg}\theta = \frac{b}{a}$ a los dos triángulos rectángulos, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}47 = \dfrac{y}{x} \\ \mathrm{tg}30 = \dfrac{y}{40+x} \end{cases}$$ Operando:

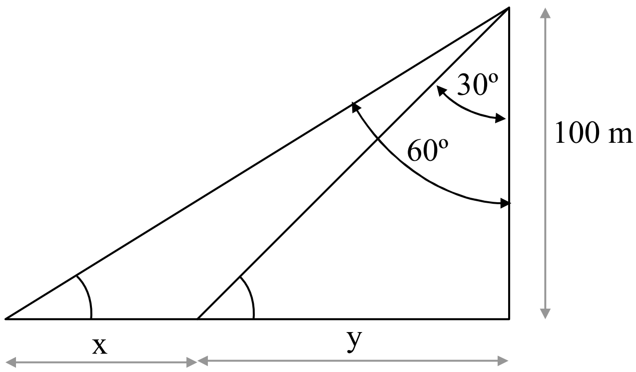
$$\begin{cases} x \cdot \mathrm{tg}47 = y \\ (40+x)\mathrm{tg}30 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot \mathrm{tg}47 = y \\ (40+x)\mathrm{tg}30 = y \end{cases} \Rightarrow x \cdot \mathrm{tg}47 = (40+x) \cdot \mathrm{tg}30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,07x = 23,09 + 0,58x \Rightarrow 0,49x = 23,09 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{23,09}{0,49} \Rightarrow x = 47,12 \text{ m}.$$

Calculemos finalmente el valor de y:

$$x \cdot tg47 = y \Rightarrow 47,12 \cdot 1,07 = y \Rightarrow y = 50,42 \text{ m}$$

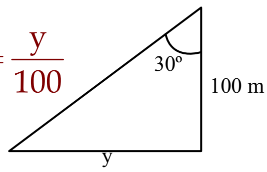
25. Calcula x



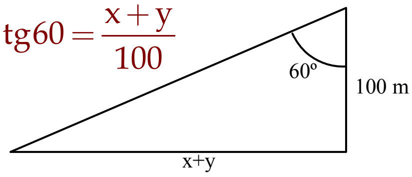
Solución:

Tenemos dos triángulos. De cada uno de ellos obtendremos una ecuación trigonométrica.

$$tg30 = \frac{y}{100}$$



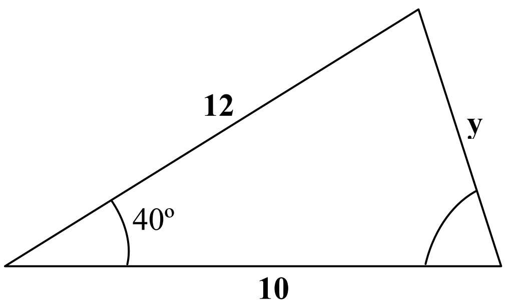
$$tg60 = \frac{x+y}{100}$$



Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 57,7 = y \\ 173,2 - x = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 57,7 = 173,2 - x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 115,5 \text{ m}$$

26. Calcula el valor de y (las longitudes están expresadas en m)



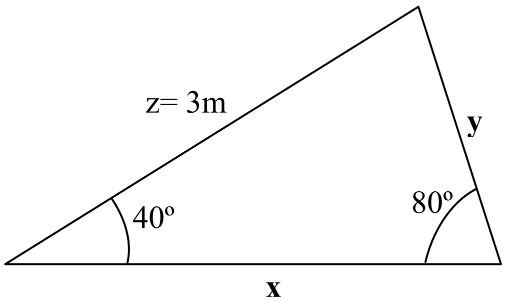
Solución:

Aplicamos el teorema del coseno:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

Entonces:

$$y^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 40 \Rightarrow$$
$$y = \sqrt{100 + 124 - 240 \cdot \cos 40} = 6,35 \text{ m}$$

27. Calcula el valor de los lados x e y, aplicando el Teorema del seno: $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{b}{\text{sen}B} = \dfrac{c}{\text{sen}C}$



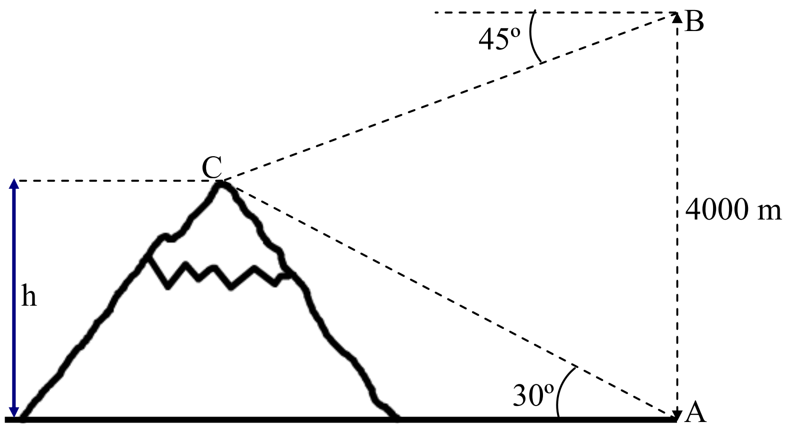
Solución:

Sustituimos los valores dados en la expresión del teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \Rightarrow$$

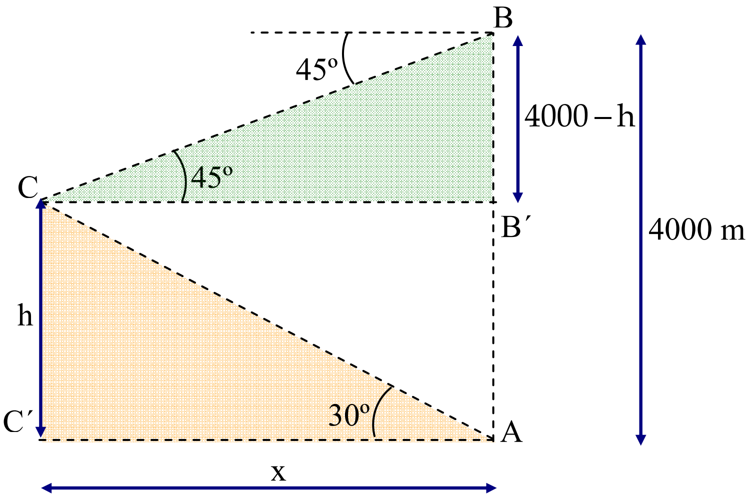
$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3 \cdot \text{sen}40}{\text{sen}80} = 1,96 \text{ m} \\ x = \dfrac{3 \cdot \text{sen}60}{\text{sen}80} = 2,64 \text{ m} \end{cases}$$

28. Halla la altura de la montaña



Solución:

Rehacemos el dibujo y de él extraeremos dos ecuaciones, cada una de ellas perteneciente a un triángulo rectángulo (el $\widehat{CBB'}$ y el $\widehat{ACC'}$



Triángulo $\widehat{CBB'}$:

$$tg45 = \frac{4000-h}{x}$$

Triángulo $\widehat{ACC'}$:

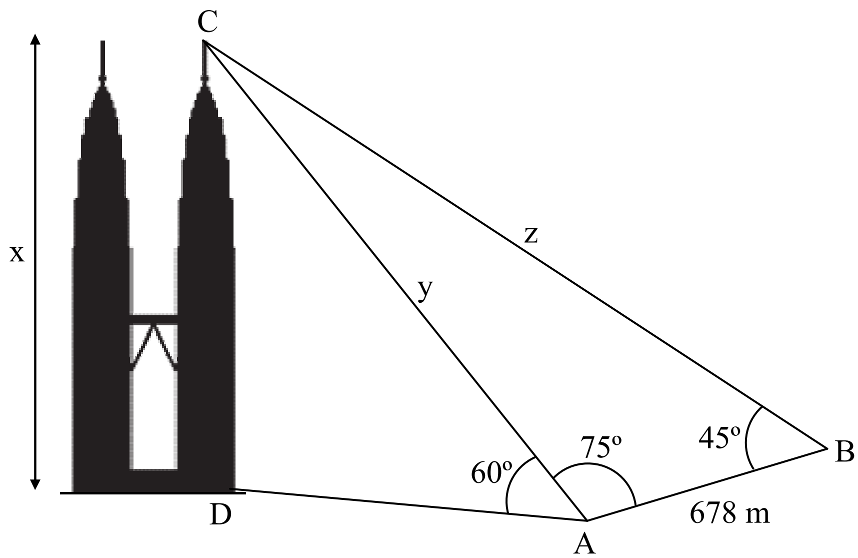
$$tg30 = \frac{h}{x}$$

Resolvamos éste sistema:

$$\left.\begin{matrix} tg45 = \dfrac{4000-h}{x} \\ tg30 = \dfrac{h}{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 = \dfrac{4000-h}{x} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4000-h \\ x = h\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4000-h = h\sqrt{3} \Rightarrow$$

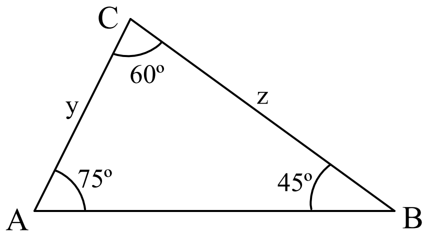
$$\Rightarrow h = \frac{4000}{\sqrt{3}+1}\,m \approx 1464\ m$$

29. Halla la altura de las Torres Petronas, **x** y también las distancias **y**, **z**.



Solución:

- Primeramente vamos a centrarnos en el triángulo $\widehat{ABC}$. De él deduciremos las distancias **y, z**

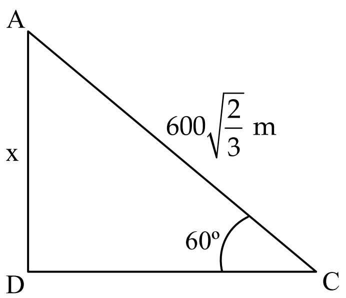


$$\frac{y}{\text{sen}45}=\frac{z}{\text{sen}75}=\frac{678}{\text{sen}60}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{\text{sen}45}=\dfrac{678}{\text{sen}60}\\[2mm] \dfrac{z}{\text{sen}75}=\dfrac{678}{\text{sen}60}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{678}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\[2mm] \dfrac{z}{\text{sen}75}=\dfrac{678}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=678\sqrt{\dfrac{2}{3}}\text{ m}}\\[2mm] \boxed{z=\dfrac{1356}{\sqrt{3}}\text{sen}75\text{ m}}\end{cases}$$

- Ahora nos fijamos en el triángulo $\widehat{ACD}$. De él obtendremos la altura de las torres, **x**.



$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}678\cdot\text{sen}60=\sqrt{\frac{2}{3}}678\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\boxed{452\text{ m}}$$